4. Fractions rationnelles

4.1 Description et propriétés

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$, et c'est l'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire les éléments $F = \dfrac{P}{Q}$ tels que $P,\ Q \neq 0 \in \mathbb{K}[X]$.

Définition 4.1 On dit que la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ est une forme irréductible lorsque

$$\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1.$$

Les opérations sur $\mathbb{K}(X)$ sont analogues à celles dans $\mathbb{Q}$, par exemple, dans $\mathbb{C}(X)$ on a

$$X + i + \frac{X^2-3}{X+2} = \frac{(X+i)(X+2)+X^2-3}{X+2} = \frac{2X^2+(2+i)X-3+2i}{X+2}.$$

Remarque

1. Les deux fractions rationnelles $F = \dfrac{P}{Q}$ et $F' = \dfrac{R}{S}$ sont dites égaux lorsque $PS = QR$.
2. Toute fraction $F = \dfrac{P}{Q}$ admet une forme irréductible. En effet, si $D = \operatorname{pgcd}(P, Q)$ alors
$$F = \frac{P}{Q} = \frac{DR}{DS} = \frac{R}{S} \text{ avec } \operatorname{pgcd}(R, S) = 1.$$

Exemple. On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^2-3X+2}{X^4-1} \in \mathbb{R}(X)$, alors

- $\dfrac{X^2-3X+2}{X^4-1}$, $\dfrac{X^3-3X^2+2X}{X^5-X}$ et $\dfrac{X-2}{(X+1)(X^2+1)}$ sont des formes de F.
- $\dfrac{X-2}{(X+1)(X^2+1)}$ est la forme irréductible de F dans $\mathbb{R}(X)$.

Définition 4.2 — Racines et pôles. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible, alors

- on appelle racine (resp. pôle) de la fraction F toute racine du polynôme P (resp. Q).
- l'ordre de multiplicité d'une racine (resp. un pôle) a de la fraction $F \neq 0$, est l'ordre de multiplicité de a en tant que racine du polynôme P (resp. Q).

Remarque Un élément $a \in \mathbb{K}$ ne peut pas être à la fois racine et pôle d'une fraction rationnelle de forme irréductible $F = \dfrac{P}{Q}$, sinon on aurait $P(a) = Q(a) = 0$ et donc les polynômes P et Q seraient divisibles par $(X-a)$. Ce qui contredirait le caractère irréductible de F.

R Les racines et les pôles d'une fraction rationnelle ne peuvent être obtenus qu'à partir d'une forme irréductible. Par exemple, 1 n'est ni racine, ni pôle de $F = \dfrac{X\,(X^3-1)}{X^2-1}$, puisque $\operatorname{pgcd}(X^3-1, X^2-1) = X-1$. La forme irréductible à utilisée est

$$F = \frac{X\,(X^2+X+1)}{X+1}.$$

Exemple. 1. La fraction $F = \dfrac{X\,(X^3-1)}{X^2-1}$ admet la forme irréductible

$$F = \frac{X\,(X^2+X+1)}{X+1}.$$

Les racine de F dans $\mathbb{C}$ sont 0, $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Et dans $\mathbb{R}$, F n'a qu'une racine 0.

2. La fraction rationnelle $F = \dfrac{X^2-3X+2}{X^4-1}$ a la forme irréductible

$$F = \frac{X-2}{(X+1)(X^2+1)}.$$

Les pôles de F dans $\mathbb{C}$ sont -1, i et $-i$. Par contre, dans $\mathbb{R}$ la fraction F n'a qu'un pôle 1.

4.2 Décomposition en éléments simples

Définition 4.3 — Partie entière. Soient $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle et $P = QE + R$ la division euclidienne de P par Q. Le polynôme E est dit la partie entière de F et on a

$$F = E + \frac{R}{Q}.$$

Exemple. La partie entière de $F = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ est le polynôme $E = X^2+2X+3$ et on a

$$F = X^2+2X+3+\frac{4X^2-3X+1}{X(X-1)^2}.$$

Propriétés 4.1 Soit $(F_i)_{i=1..n}$ des fractions de parties entières respectives $(E_i)_{i=1..n}$, alors

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ est la partie entière de } F = \sum_{i=1}^{n} F_i.$$

Théorème 4.1 Soit $F = \dfrac{A}{B_1 B_2 \cdots B_n}$ une fraction de partie entière E. Si les $B_1, \cdots, B_n$ sont deux à deux premiers, alors il existe une unique famille de polynômes $A_1, \cdots, A_n$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{B_i} \quad \text{avec} \quad \forall i = 1, .., n \ : \ \deg(A_i) < \deg(B_i).$$

Corollaire 4.1 — Séparation des pôles. Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction de partie entière E. Si B est scindé, c'est-à-dire

$$B = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i} \text{ où les } b_i \text{ sont deux à deux distincts,}$$

alors, il existe une famille unique de polynômes $A_1, \cdots, A_p$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{(X - a_i)^{m_i}} \quad \text{avec} \quad \forall i = 1, .., n, \ \deg(A_i) < m_i.$$

La fraction $\dfrac{A_i}{(X - a_i)^{m_i}}$ est appelé la partie polaire relative au pôle a_i.

Théorème 4.2 — Décomposition d'une partie polaire. Pour $F = \dfrac{A}{(X-a)^n} \in \mathbb{K}(X)$ avec $\deg(A) < n$, il existe une famille unique $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$F = \frac{\alpha_1}{(X-a)} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \cdots \frac{\alpha_n}{(X-a)^n}.$$

Exemple. — Méthode pratique pour déterminer la partie polaire.

1. Si a est un pôle d'ordre 1 de $F = \dfrac{A}{B}$, on peut écrire $B = (X-a)\,Q$ avec $Q(a) \neq 0$ et alors

$$F = \frac{A}{(X-a)\,Q} = \underbrace{\frac{\alpha}{X-a}}_{\substack{\text{partie}\\ \text{polaire}\\ \text{relative à } a.}} + \frac{C}{D} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{K} \ \text{ et } \ D(a) \neq 0.$$

   En multipliant cette égalité par $X - a$, on obtient

$$\frac{A}{Q} = \alpha + \frac{(X-a)\,C}{D}.$$

Ce qui en prenant $X = a$ donne $\alpha = \dfrac{A(a)}{Q(a)}$. Pour trouver $Q(a)$, on peut remarquer que

$$B = (X-a)\,Q \implies B' = Q + (X-a)\,Q' \implies B'(a) = Q(a)\,.$$

Et donc on obtient

$$\boxed{\alpha = \frac{A(a)}{B'(a)}\,.}$$

2. Si a est un pôle d'ordre 2 de $F = \dfrac{A}{B}$, on peut écrire $B = (X-a)^2\,Q$ avec $Q(a) \neq 0$ et alors

$$F = \frac{A}{(X-a)^2\,Q} = \underbrace{\frac{\alpha}{(X-a)^2} + \frac{\beta}{X-a}}_{\substack{\text{partie polaire}\\ \text{relative à } a.}} + \frac{C}{D} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \text{ et } \ D(a) \neq 0\,.$$

En multipliant cette égalité par $(X-a)^2$, on obtient

$$\frac{A}{Q} = \alpha + \beta\,(X-a) + \frac{(X-a)^2\,C}{D}\,.$$

Ce qui en prenant $X = a$ donne $\alpha = \dfrac{A(a)}{Q(a)}$. Pour trouver $Q(a)$, on peut remarquer que

$$B = (X-a)^2\,Q \implies B^{(2)} = 2Q + 4(X-a)\,Q' + (X-a)^2 Q^{(2)} \implies B^{(2)}(a) = 2\,Q(a)\,.$$

Et donc on obtient

$$\boxed{\alpha = \frac{2A(a)}{B^{(2)}(a)}\,.}$$

Pour calculer β, on peut remarquer que

$$F - \frac{\alpha}{(X-a)^2} = \frac{A}{B} - \frac{\alpha}{(X-a)^2} = \boxed{\frac{A - \alpha\,Q}{B} = \frac{\beta}{X-a} + \frac{C}{D}\,.}$$

En plus, comme on a $A(a) - \alpha\,Q(a) = 0$ alors $A - \alpha\,Q = (X-a)\,A_1$ et donc

$$\boxed{\frac{A_1}{(X-a)\,Q} = \frac{\beta}{X-a} + \frac{C}{D}\,.}$$

Et cela nous ramène au premier cas.

3. Si a est un pôle d'ordre r de $F = \dfrac{A}{B}$, on peut écrire $B = (X-a)^r\,Q$ avec $Q(a) \neq 0$ et alors

$$F = \frac{A}{(X-a)^r\,Q} = \underbrace{\frac{\alpha_r}{(X-a)^r} + \cdots + \frac{\alpha_1}{X-a}}_{\substack{\text{partie polaire}\\ \text{relative à } a.}} + \frac{C}{D} \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K} \ \text{ et } \ D(a) \neq 0\,.$$

En multipliant par $(X-a)^r$ et puis en prenant $X = a$, on obtient

$$\boxed{\alpha_r = \frac{A(a)}{Q(a)} = \frac{r!\,A(a)}{B^{(r)}(a)}\,.}$$

En plus, on remarque que

$$F - \frac{\alpha_r}{(X-a)^r} = \frac{A}{B} - \frac{\alpha_r}{(X-a)^r} = \boxed{\frac{A-\alpha_r Q}{B} = \frac{\alpha_{r-1}}{(X-a)^{r-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{C}{D}}.$$

En plus, comme on a $A(a) - \alpha_r Q(a) = 0$ alors $A - \alpha_r Q = (X-a)A_1$ et donc

$$\boxed{\frac{A_1}{(X-a)^{r-1}Q} = \frac{\alpha_{r-1}}{(X-a)^{r-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{C}{D}}.$$

et on recommence pour calculer α_{r-1}. En réitérant ce procédé, on obtient tous coefficients.

Exemple. La fraction $F = \frac{A}{B} = \frac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ admet le pôle simple 0 et le pôle double 1, alors

– la partie polaire de F relative à 0 est $\frac{\alpha}{X}$ avec $\alpha = \frac{1!A(0)}{B^{(1)}(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

– la partie polaire de F relative à 1 est $\frac{\beta_1}{X-1} + \frac{\beta_2}{(X-1)^2}$ avec $\beta_2 = \frac{2!A(1)}{B^{(2)}(1)} = 2\,\frac{2}{2} = 2$.

Et comme $F - \frac{\beta_2}{(X-1)^2} = \frac{X^5-2X+1}{(X-1)^2 X} = \frac{P = X^4+X^3+X^2+X-1}{Q=(X-1)X}$ On en déduit que

$$\beta_1 = \frac{1!P(1)}{Q^{(1)}(1)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Théorème 4.3 — Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible, admettant les pôles distincts $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ d'ordres de multiplicité respectifs $r_1, \cdots, r_n$. Alors F s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$F = \underbrace{E}_{\substack{\text{partie}\\ \text{entière}\\ \text{de } F.}} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(X-a_i)^k} \right)}_{\substack{\text{partie polaire}\\ \text{relative à } a_i.}} \quad \text{où les } \alpha_{i,k} \text{ sont des complexes.}$$

Exemple. D'après les exemples précédents la décomposition de $F = \frac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$F = \underbrace{X^2+2X+3}_{\substack{\text{partie}\\ \text{entière}\\ \text{de } F.}} + \underbrace{\frac{1}{X}}_{\substack{\text{partie}\\ \text{polaire}\\ \text{relative à } 0.}} + \underbrace{\frac{3}{(X-1)} + \frac{2}{(X-1)^2}}_{\substack{\text{partie}\\ \text{polaire}\\ \text{relative à } 1.}}$$

Remarque Pour calculer les coefficient de la décomposition de F, il est plus simple d'utiliser :

1. **Parité de F :** on en déduit des relations entre les coefficients de la décomposition de F.
2. **Utilisation de $\lim_{+\infty} xF(x)$:** supposons $\deg(P) < \deg(Q)$ alors si $\lim_{+\infty} xF(x)$ est finie, on peut obtenir des relations entre les coefficients des termes en $\frac{1}{X-a_i}$ dans la décomposition de F.

3. **S'il ne reste qu'un ou deux coefficients à déterminer :** On peut substituer à X une ou deux valeurs simples.
4. **Si F est une fraction de $\mathbb{R}(\mathbf{X})$:** Si a est pôle non réel de F d'ordre r, alors $\overline{a}$ est aussi un pôle d'ordre r et les coefficients des parties polaires associées à a et $\overline{a}$ sont deux à deux conjuguées.

Exemple. La fraction $F = \dfrac{4}{(X^2-1)^2}$ se décompose en éléments simples sous la forme

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

Comme F est une fraction paire alors $F(X) = F(-X)$ et donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{c}{(-X-1)^2} + \frac{d}{(-X+1)^2} \\ &= \frac{-a}{X+1} + \frac{-b}{X-1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{(X-1)^2}. \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition implique que $a = -b$ et $c = d$. De plus, on a

$$c = \frac{2!A(1)}{B^{(2)}(1)} = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1.$$

Posons $X = 0$, il vient $4 = F(0) = -a+b+c+d = 2b+2$ et donc les coefficients de F sont

$$a = -1\,,\; b = 1 \;\text{ et }\; c = d = 1.$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{F = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2}.}$$

Exemple. La décomposition de la fraction $F = \dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$ en éléments simples est

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

Comme F est impaire, alors $F(-X) = -F(X)$ et donc

$$\frac{-a}{X+1} + \frac{-b}{X-1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{(X-1)^2} = \frac{-a}{X-1} + \frac{-b}{X+1} + \frac{-c}{(X-1)^2} + \frac{-d}{(X+1)^2}.$$

L'unicité de la décomposition assure que $b = a$ et $d = -c$. De plus, on a

$$c = \frac{2!A(1)}{B^{(2)}(1)} = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1,$$

et puisque $\lim\limits_{\infty} X\,F(X) = 4 = a+b$, on a $2a = 4$. Finalement,

$$\boxed{F = \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X+1)^2}.}$$

Exemple. La décomposition de la fraction $F = \dfrac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$ en éléments simples est

$$F = 1 + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+i}$$

On trouve

$$c = \frac{1!A(i)}{B^{(1)}(i)} = \frac{i^4+1}{2i(1+i)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{2!A(-1)}{B^{(2)}(-1)} = 1\,.$$

En posant $X=0$, on obtient $1 = 1+a+b-\dfrac{c}{i}+\dfrac{\overline{c}}{i} = 2+a$ et donc $a=-1$. Finalement,

$$\boxed{F = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{2(X-i)} - \frac{1}{2(X+i)}\,.}$$

Théorème 4.4 — Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction irréductible de $\mathbb{R}(X)$ et $B = b\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{r_i}\prod_{j=1}^{q}(X^2+s_jX+t_j)^{\beta_j}$ la décomposition de B en éléments irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Alors, F s'écrit d'une manière unique :

$$F = E + \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{r_i}\frac{\alpha_{i,k}}{(X-a_i)^k}\right) + \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{\beta_j}\frac{\lambda_{j,k}+\gamma_{j,k}X}{(X^2+s_jX+t_j)^k}\right).$$

où E est la partie entière de F et les $\alpha_{i,k}$, $\lambda_{j,k}$ et $\gamma_{j,k}$ sont des nombres réels.

Exemple. Dans $\mathbb{C}(X)$, la DES de $F = \dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$ s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X+2},$$

avec $a = \dfrac{A(i)}{B'(i)} = 1$, $b = \overline{a} = 1$, $c = \dfrac{A(2)}{B'(2)} = 4$ et $d = \dfrac{A(-2)}{B'(-2)} = 4$ et alors

$$F = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} + \frac{4}{X-2} + \frac{4}{X+2} \quad \text{dans} \quad \mathbb{C}(X)\,.$$

Et la DES de F dans $\mathbb{R}(X)$ est obtenue donc en sommant les termes à pôles conjugués

$$\boxed{F = \frac{2X}{X^2+2} + \frac{4}{X-2} + \frac{4}{X+2}\,.}$$

Dans l'exemple précédent, la DES dans $\mathbb{R}(X)$ est obtenue à partir de la DES dans $\mathbb{C}(X)$. On verra, dans les exemples suivants, qu'elle peut être obtenue directement dans $\mathbb{R}(X)$ sans passer par $\mathbb{C}(X)$.

Exemple. La DES de $F = \dfrac{2X(2X+1)}{(X^2+1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit sous la forme

$$F = \frac{aX+b}{(X^2+1)} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2}\,.$$

Évaluons $(X^2+1)^2 F$ en $X = i$ (la racine de X^2+1), on obtient $2i - 4 = ci + d$ d'où

$$c = 2 \text{ et } d = -4.$$

La limite de $XF(X)$ en $+\infty$ fournit $a = 0$ et l'évaluation de F en 0 entraîne $b + d = 0$ et alors

$$b = -d = 4.$$

Par suite, on obtient

$$\boxed{F = \frac{4}{(X^2+1)} + \frac{2X-4}{(X^2+1)^2}.}$$

Exemple. La DES de $F = \dfrac{1}{(X+1)(X^2+X+1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit sous la forme

$$F = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{(X^2+X+1)} + \frac{dX+e}{(X^2+X+1)^2} \quad \text{avec } a = \frac{A(-1)}{B'(-1)} = 1.$$

Évaluons $(X^2+X+1)^2 F$ en $X = j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ racine de X^2+X+1, on obtient

$$dj + e = \frac{1}{1+j} = \frac{-1}{\overline{j}} = \frac{-j}{j\overline{j}} = \frac{-j}{\|j\|^2} = -j.$$

Puisque $\{1, j\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, on déduit que

$$d = -1 \text{ et } e = 0.$$

D'autre part, l'évaluation de F en 0 et la limite $\lim\limits_{+\infty} XF(X)$ impliquent

$$\begin{cases} a + c + e = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

donc $c = 0$ et $b = -1$. Finalement,

$$\boxed{F = \frac{1}{X+1} - \frac{X}{(X^2+X+1)} - \frac{X}{(X^2+X+1)^2}.}$$

Exercice 4.1 *Donner la DES dans $\mathbb{R}(X)$, puis dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes*

$$F_1 = \frac{1}{(X^2+X+1)(X^2+1)(X^2-1)} \quad ; \quad F_2 = \frac{X+1}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}.$$